ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

LÊ BÁ LONG NHẬT

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU LIÊN HỢP VÀ LÝ THUYẾT ĐỐI NGẪU LAGRANGE

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Dương Thị Việt An

THÁI NGUYÊN - 2020

Mục lục

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{R}$	trường số thực
$\overline{\mathbb{R}}$	tập số thực suy rộng
$\mathbb{R}^+$	tập số thực không âm
X^*	không gian liên hợp (đối ngẫu) của X
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall\, x$	với mọi x
$\exists\, x$	tồn tại x
$M \cap N$	giao của hai tập hợp M và N
$\|x\|$	giá trị tuyệt đối của x
$\|\|x\|\|$	chuẩn của véctơ x
$\overline{B}_X(0,1)$	hình cầu đơn vị đóng trong X
$\operatorname{int} A$	phần trong của tập A
$\inf\limits_{x \in K} f(x)$	infimum của tập số thực $\{f(x) \mid x \in K\}$
$\sup\limits_{x \in K} f(x)$	supremum của tập số thực $\{f(x) \mid x \in K\}$
$\delta_\Omega(\cdot)$	hàm chỉ của tập Ω
$\operatorname{epi} f$	trên đồ thị của hàm f
$\operatorname{dom} f$	miền hữu hiệu của hàm f
$\langle x^*, x \rangle$	giá trị của phiếm hàm x^* tại x

$\partial f(x)$	dưới vi phân của hàm lồi f tại x
f^*	hàm liên hợp của hàm f
f^{**}	hàm liên hợp thứ hai của hàm f
l.s.c.	nửa liên tục dưới
$\mathcal{N}(x)$	họ các lân cận của x
$val(P)$	tập các giá trị tối ưu của bài toán P

Mở đầu

Lý thuyết đối ngẫu là một bộ phận quan trọng của lý thuyết tối ưu hoá. Tương ứng với mỗi bài toán Quy hoạch tuyến tính (còn gọi là bài toán gốc) có một bài toán đối ngẫu. Bài toán gốc và bài toán đối ngẫu có mối liên hệ qua lại với nhau, tính chất của bài toán này có thể được khảo sát thông qua bài toán kia. Nhiều quy trình tính toán hay phân tích được hoàn thiện khi xem xét cặp bài toán gốc và bài toán đối ngẫu trong mối quan hệ chặt chẽ của chúng, mang lại những lợi ích trong việc giải quyết các vấn đề phát sinh từ thực tế.

Bài toán quy hoạch toán học trong các không gian vô hạn chiều đã được nghiên cứu từ giữa thế kỉ trước, bắt đầu với mô hình bài toán quy hoạch tuyến tính vô hạn chiều. Nhiều bài toán tối ưu trong các không gian hàm, có cấu trúc phức tạp, như bài toán điều khiển tối ưu và bài toán biến phân có thể đưa về bài toán quy hoạch toán học trong không gian vô hạn chiều.

Phép tính vi phân là một trong những đề tài cơ bản nhất của giải tích cổ điển. Trong giải tích lồi, lý thuyết này lại càng trở nên phong phú nhờ những tính chất đặc biệt của tập lồi và hàm lồi. Dưới vi phân là khái niệm mở rộng cho khái niệm đạo hàm khi hàm không khả vi. Điều này cho thấy vai trò của dưới vi phân trong giải tích hiện đại cũng có tầm quan trọng như vai trò của đạo hàm trong giải tích cổ điển.

Trong Lý thuyết tối ưu nói chung và Giải tích lồi nói riêng, các quy tắc tính tổng dưới vi phân của các hàm lồi, chính thường có vai trò hết sức quan trọng, đặc biệt là khi ta làm việc với các bài toán tối ưu có ràng buộc.

Mục đích của luận văn là nghiên cứu lý thuyết đối ngẫu liên hợp và lý thuyết đối ngẫu Lagrange cho bài toán quy hoạch lồi có tham số trong không gian Banach. Từ đó áp dụng lược đồ đối ngẫu để nghiên cứu quy tắc tính tổng dưới vi phân của các hàm lồi, chính thường dưới những điều kiện chính quy thích hợp.

Nội dung của luận văn được dịch ra Tiếng Việt một số nội dung từ mục *2.5 Duality Theory* trong cuốn sách chuyên khảo *"Perturbation Analysis of Optimization Problems"* (Springer, New York, 2000) của các tác giả J. F. Bonnans and A. Shapiro [3]. Trong quá trình nghiên cứu tác giả cũng tìm hiểu, tổng hợp các kiến thức cơ bản liên quan và cố gắng diễn đạt chi tiết chứng minh của các mệnh đề và các định lý.

Luận văn gồm phần mở đầu, phần kết luận, danh mục tài liệu tham khảo, và hai chương có nội dung như sau:

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị nhắc lại một số khái niệm và kiến thức cơ bản về tập lồi, hàm lồi, hàm liên hợp cùng một số kết quả bổ trợ nhằm phục vụ cho việc chứng minh các kết quả ở chương sau.

Chương 2: Một số vấn đề về lý thuyết đối ngẫu trình bày hai cách tiếp cận về lý thuyết đối ngẫu: Đối ngẫu liên hợp và Đối ngẫu Lagrange. Ví dụ và áp dụng sơ đồ đối ngẫu cũng được nghiên cứu ở chương này. Đặc biệt, ở phần cuối chương, một kết quả về quy tắc tính toán dưới vi phân của tổng hai hàm lồi, nửa liên tục dưới, chính thường thu được bằng cách áp dụng sơ đồ đối ngẫu.

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Dương Thị Việt An. Em xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Cô đã hướng dẫn hiệu quả và truyền cho em những kinh nghiệm nghiên cứu trong quá trình em học tập và hoàn thiện luận văn này.

Em cũng xin chân thành cảm ơn các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho em trong suốt quá trình em học tập ở trường.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 8 năm 2020

Học viên

Lê Bá Long Nhật

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kiến thức cơ bản về tập lồi, hàm lồi, hàm liên hợp cùng một số kết quả bổ trợ nhằm phục vụ cho việc chứng minh các kết quả của chương sau. Nội dung của chương được tham khảo từ các tài liệu [1], [2] và [3].

1.1 Tập lồi và Hàm lồi

Giả sử X là không gian Banach với không gian đối ngẫu tương ứng là X^*, $D \subset X,\ f : D \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Các tập hợp dưới đây:

$$\begin{aligned}
&\text{epi}f := \{(x, \alpha) \in D \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq \alpha\},\\
&\text{dom}f := \{x \in D \mid f(x) < +\infty\},
\end{aligned}$$

lần lượt được gọi là *trên đồ thị* và *miền hữu hiệu* của hàm f. Hàm f được gọi là chính thường nếu $\text{dom}f \neq \emptyset$ và $f(x) > -\infty,\ \forall x \in D$.

Định nghĩa 1.1. Tập $A \subset X$ được gọi là *lồi* nếu

$$\forall x, y \in A,\ \forall \lambda \in (0, 1) \Rightarrow \lambda x + (1 - \lambda)y \in A.$$

Quy ước: Tập $\emptyset$ là tập lồi.

Ví dụ 1.1. Trong không gian hữu hạn chiều, mặt phẳng, đoạn thẳng, đường thẳng, tam giác, hình cầu là các tập lồi.

Mệnh đề 1.1. (xem [1, trang 4]) *Giả sử* $A_\alpha \subset X(\alpha \in I)$ *là các tập lồi, với* I *là tập chỉ số bất kỳ. Khi đó* $A = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ *cũng là tập lồi.*

Mệnh đề 1.2. (xem [1, trang 4]) *Giả sử tập* $A_i \in X$ *là các tập lồi,* $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\overline{1, m}$. *Khi đó* $\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_m A_m$ *là tập lồi.*

Mệnh đề 1.3. (xem [1, trang 4]) *Giả sử* X_i *là không gian tuyến tính, tập* $A_i \subset X_i$ *lồi* $(i = \overline{1, n})$. *Khi đó, tích Đề các* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *là tập lồi trong* $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$.

Định nghĩa 1.2. Hàm $f : D \to \overline{\mathbb{R}}$ được gọi là *lồi* trên D nếu epi$f$ là tập lồi trong $X \times \mathbb{R}$.

Mệnh đề 1.4. (xem [1, trang 40]) *Cho* $f : X \to (-\infty, +\infty]$. *Khi đó* f *là hàm lồi nếu và chỉ nếu*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),\ \forall x, y \in X,\ \lambda \in (0, 1). \quad (1.1)$$

Chứng minh. $\Rightarrow$) Vì f là hàm lồi nên epi$f$ là tập lồi. Khi đó với mọi $(x, r) \in \text{epi}f$, $(y, s) \in \text{epi}f$, $\lambda \in (0, 1)$, ta có

$$\begin{aligned}
&\lambda(x, r) + (1 - \lambda)(y, s) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda r + (1 - \lambda)s) \in \text{epi}f \\
&\Leftrightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda r + (1 - \lambda)s \\
&\Leftrightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),\ (\text{lấy } r = f(x), s = f(y)).
\end{aligned}$$

Nếu x hoặc y không thuộc dom$f$ thì $f(x) = +\infty$ hoặc $f(y) = +\infty$. Khi đó (1.1) đúng.

$\Leftarrow$) Ngược lại giả sử (1.1) đúng. Lấy $(x, r) \in \text{epi}f, (y, s) \in \text{epi}f$, với mọi